合肥市2014年高三第三次教学质量检测
数学试题(文)参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	D	C	A	A	B	D	B	D

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 1；　12. -1或4；　13. 39；　14. $[\frac{\sqrt{3}}{2},1)$；　15. $-\frac{9}{4}$；

三、解答题

16.（Ⅰ）由 $b^2-a^2+c^2-\sqrt{2}bc=0$ 得 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$ $\therefore A=\frac{\pi}{4}$ ………5分

（Ⅱ）由 $b\sin B-c\sin C=a$ 及正弦定理得：$\sin^2 B-\sin^2 C=\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则 $\cos 2C-\cos 2B=\sqrt{2}$.

即 $\cos 2C+\sin 2C=\sqrt{2}$，$\sin(2C+\frac{\pi}{4})=1$.

得 $C=\frac{\pi}{8}+k\pi$，$k\in Z$. 而 $C\in(0,\frac{3}{4}\pi)$.

可得 $C=\frac{\pi}{8}$，又 $A=\frac{\pi}{4}, a=\sqrt{2}$

所以 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=2\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ………12分

17.（Ⅰ）由频率分布直方图得，考评分不低于80分的频率为

$1-0.05-0.2-0.4=0.35$，所以估计全市学校的达标率为35% ………5分

（Ⅱ）考评分在[90，100]的频率为0.1，

$\therefore$参加考评且结果为优秀的学校有 $0.10\times 60=6$（所），

又已知甲乙两所学校考评结果均为优秀，

这 6 所学校分别记为：甲、乙、丙、丁、戊、己

故从中抽取 2 所共有：甲、乙；甲、丙；甲、丁；甲、戊；甲、己；乙、丙；乙、丁；乙、戊；乙、己；丙、丁；丙、戊；丙、己；丁、戊；丁、己；戊、己，共计 15 种结果，

且甲乙两所学校至少有一所被选中的有：甲、乙；甲、丙；甲、丁；甲、戊；甲、己；乙、丙；乙、丁；乙、戊；乙、己，共计 9 种结果，

所以甲乙两所学校至少有一所被选中的概率为 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ ………12 分.

18.（Ⅰ）当点 G 位于 AF 中点时，有 $EG /\!/$ 面 $ABCD$.

取 AD 中点 H，连接 GH、GE、BH.

$\because GH /\!/ DF$ 且 $GH=\frac{1}{2}DF$ $\therefore GH /\!/ BE$ 且 $GH=BE$

$\therefore$ 四边形 $BEGH$ 为平行四边形

$\therefore EG /\!/ BH$

又 $BH \subset$ 面 $ABCD$，$EG \not\subset$ 面 $ABCD$

$\therefore EG /\!/$ 面 $ABCD$. ………6 分

（Ⅱ）连接 BD，由 $V=V_{A-BDFE}+V_{C-BDFE}=2V_{A-BDFE}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$ ………12 分

19.（Ⅰ）设椭圆 C 的方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$ 则

$$\begin{cases}16m+n=1\\4m+4n=1\end{cases}\Rightarrow m=\frac{1}{20},n=\frac{1}{5},$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ………6 分

（Ⅱ）设 $l: y=x+m$，联立方程组：

$$\begin{cases}x^2+4y^2=20\\y=x+m\end{cases}\Rightarrow 5x^2+8mx+4m^2-20=0$$

则 $\Delta=-16m^2+400>0\Rightarrow -5<m<5$

又有点 M 到直线 l 的距离为 $\dfrac{|m+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow m=-1(m=-5$舍）

所以直线 l 的方程为 $x-y-1=0$. ………13 分

20. 解：(Ⅰ) $f'(x)=\dfrac{1}{2}x-x\sin x=x(\dfrac{1}{2}-\sin x)$

当 $x\in(0,\pi)$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $x=\dfrac{5\pi}{6}$，列表

x	$(0,\frac{\pi}{6})$	$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$	$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{5\pi}{6},\pi)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $(0,\dfrac{\pi}{6})$，$(\dfrac{5\pi}{6},\pi)$，单调递减区间为 $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$ ………6 分

(Ⅱ) 设 $P(x_1,h(x_1))$、$Q(x_2,h(x_2))$ 为 $h(x)$ 图像上任意两点，且 $x_1<x_2$，

则所证结果即为 $\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>0$

等价于 $h(x_1)<h(x_2)$

则只需证 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单增.

$\because h(x)=f(x)-g(x)=x\cos x-\sin x+\dfrac{1}{3}x^3, x\in(0,1)$

$\therefore h'(x)=-x\sin x+x^2=x(x-\sin x)$

设 $\varphi(x)=x-\sin x, x\in[0,1)$，则 $\varphi'(x)=1-\cos x\geqslant 0$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[0,1)$ 单调递增，$\therefore \varphi(x)>\varphi(0)=0$ 在 $x\in(0,1)$ 上成立，

$\therefore h'(x)>0$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立，即 $h(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单增，所以，原命题成立.

………13 分

21. (Ⅰ) $\because a_n={a_{n+1}}^2+2a_{n+1}$，$\therefore a_n+1=(a_{n+1}+1)^2$，

$\because a_n > 0$，$\therefore \log_2(a_{n+1}+1) = \frac{1}{2}\log_2(a_n+1)$，

$\therefore \{\log_2(a_n+1)\}$是以 1 为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列. ………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知$\log_2(a_n+1) = (\frac{1}{2})^{n-1}$

$\therefore b_n = n\log_2(a_n+1) = n\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$

$S_n = 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$

$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\cdots\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$

上面两式相减，得

$\frac{1}{2}S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\cdots\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n} = 2[1-(\frac{1}{2})^n]-\frac{n}{2^n}$

$\therefore S_n = 4-\frac{n+2}{2^{n-1}} < 4$

又$\because b_n = n\cdot(\frac{1}{2})^{n-1} > 0$

$\therefore S_n \geqslant S_1 = 1$

所以$1 \le S_n < 4$. ………13 分